ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. α)Λ β)Λ γ) Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$D_f = D_g = R$

Για κάθε $x \in R$ $f \circ g = g \circ f$, άρα

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow$$
$$f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow ag(x)+1 = f(x)+2 \Leftrightarrow$$
$$a(x+2)+\cancel{1} = ax+\cancel{1}+2 \Leftrightarrow ax+2a = ax+2 \Leftrightarrow$$
$$2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Β2. $f(x) = x+1, x \in R$

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1+1 = x_2+1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1, οπότε ορίζεται και η αντίστροφη.

Έστω $x \in R$ τότε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y-1, y \in R$$

Άρα $f^{-1}(x) = x-1, x \in R$

Β3. Για να εξετάσω αν η f και η f^{-1} τέμνονται λύνω την εξίσωση

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x+1=x-1\Leftrightarrow 0x=-2, \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$$

Άρα οι f και f^{-1} δεν τέμνονται.

Β4.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}^2-2^2}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f συνεχής στο R άρα και στο 0, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-a\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)\Leftrightarrow -a=1\Leftrightarrow a=-1$$

Γ2.

Είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-x, & x\geq 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$ και $f(0)=1$

Ελέγχω αν η f παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\sqrt{x^2+1}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}{x\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}^2-(x+1)^2}{x\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-x^2-2x-1}{x\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}==\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

Γ3. Για x>0

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'-1=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$
$$=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$$

Αφού για κάθε χ>0

$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x, άρα$$
$$\sqrt{x^2+1}>x\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$$

Οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Για x<0

$f'(x)=2x<0, για\ κάθε\ x<0$, οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Κι επειδή η f συνεχής στο 0, τελικά η f γνησίως φθίνουσα στο R.

Γ4.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in R$ $f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x) = \left(x^3\right)'$ κι επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $f(x) = x^3 + c$, η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $f(x) = x^3$.

Δ2. Έστω $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης.

Τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι της μορφής $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$ $y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0)$

Κι επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}(-2, f(-2))$ δηλ. από το $N(-2,-8)$ θα την επαληθεύει, οπότε

$$-8 - x_0^3 = 3x_0^2(-2 - x_0) \Leftrightarrow -8 - x_0^3 = -6x_0^2 - 3x_0^3 \Leftrightarrow$$
$$2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)\left(2x_0^2 + 8x_0 + 8\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2$$

Οπότε οι εξισώσεις των ζητούμενων εφαπτομένων είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$$
$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y + 8 = 12(x + 2) \Leftrightarrow y = 12x + 16$$

Δ3.

Επειδή το σημείο Μ ξεκινάει από το σημείο N(-2,-8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων ισχύει $-2 < x < 0$.

Έστω t_0 η ζητούμενη χρονική στιγμή, τότε

$$y'(t_0) = 3x'(t_0) \Leftrightarrow$$
$$3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) = 3x'(t_0) \overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow}$$
$$3x^2(t_0) = 3 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow$$
$$x(t_0) = \pm 1 \overset{-2<x<0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = -1$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το M(-1,f(-1)) δηλαδή το M(-1,-1).