

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128-129.

A4.

α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ πρέπει $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) > 0$. Όμως, $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

Έτσι, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$(f \circ g)'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1, δηλαδή αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της h , αφού η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα, είναι

$(f \circ g)(-\infty, +\infty) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) \right) = (0, +\infty)$, διότι:

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(0 + 1) = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty.$$

Έστω, τώρα, $y = (\text{fog})(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$. Δηλαδή, $h(x) = \ln(e^x - 1)$, $x > 0$.

B3. (i) Η h είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων, με

$$h'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Άρα, η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.}$$

(ii) Η h' είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων, με

$$h''(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Επομένως, η } h \text{ είναι κοίλη και δεν έχει σημεία καμπής.}$$

B4. Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως παραγωγίσιμη, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = -\infty, \text{ άρα η ευθεία } \varepsilon: x = 0 \text{ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της } h(x).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύουν:

$$-f(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

και λόγω συνέχειας της f στο 0 (αφού είναι συνεχής παντού) αυτά πρέπει να είναι και ίσα, άρα $a = 1$.

$$\mathbf{\Gamma 2.} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = (D.L.H.) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 |f(x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\eta\mu x + 1| dx + \int_0^1 |e^x| dx.$$

Όμως, $e^x > 0$ για κάθε x και επίσης για κάθε x ισχύει $\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow \eta\mu x + 1 \geq 0$ και έτσι έχουμε:

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\eta\mu x + 1) dx + \int_0^1 e^x dx = [-\sigma\upsilon\nu x + x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [e^x]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2} + e - 1 = e + \frac{\pi}{2} - 2 \tau. \mu..$$

Γ4. Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$, αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} .

Επιπλέον, $f(\pi) = f(0) = 1$.

Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο διάστημα $[-\pi, 0]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο $(-\pi, 0)$ με $f'(\xi) = 0$.

Έστω $f'(\xi) = 0$, $\xi \in (-\pi, 0) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = 0$ και αφού το ξ είναι στο $(-\pi, 0)$, θα είναι $\xi = -\frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \varepsilon: y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow \varepsilon: y = x.$$

Δ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, με

$$f''(x) = 3ax^2 + 6x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θέλουμε $f''(x) \geq 0$, οπότε για να διατηρεί πρόσημο το πολυώνυμο, θα πρέπει η διακρίνουσα να μην είναι θετική.

$$\text{Πρέπει, δηλαδή, } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 36 - 12a \leq 0 \Leftrightarrow 3 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή του a ώστε η f να είναι παντού κυρτή, είναι $a = 3$.

Δ3. Για $a = 3$, είναι $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

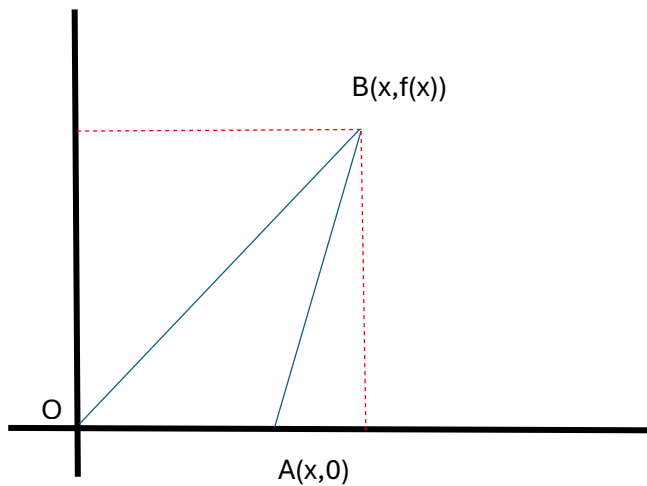
Οπότε, $f(x) - x = x^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} \right) \geq 0$. Επομένως, αν $u = f(x) - x$, αφού $f(0) - 0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x) - x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(f(x) - x)} = 0.$$

$$\text{Επίσης, } \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu(f(x)) = \lim_{f(x) \rightarrow 0} \eta\mu(f(x)) = \eta\mu 0 = 0.$$

$$\text{Τελικά, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{\ln(f(x) - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta\mu(f(x)) \cdot \frac{1}{\ln(f(x) - x)} \right] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Δ4.



Η βάση του τριγώνου είναι ίση με x και το ύψος του με $f(x)=\frac{3}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+x$.

Άρα το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του χρόνου t , είναι:

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\left(\frac{3}{4}x^4(t)+x^3(t)+\frac{1}{2}x^2(t)+x(t)\right)=\frac{3}{8}x^5(t)+\frac{1}{2}x^4(t)+\frac{1}{4}x^3(t)+\frac{1}{4}x^2(t), t \geq 0.$$

Η $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνύμικη, με

$$E'(t)=\frac{15}{8}x^4(t)x'(t)+2x^3(t)x'(t)+\frac{3}{4}x^2(t)x'(t)+x(t)x'(t), t \geq 0.$$

Άρα, για τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $x(t)=2$, έχουμε (αφού δίνεται $x'(t)=2$):

$$E'(t_0)=\frac{15}{8} \cdot 16 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 102 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$