

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Σχολικό σελίδα 133

A2. Σχολικό σελίδα 51

A3. Σχολικό σελίδα 185

A4. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Θέμα Β

B1.

$$A_h = D_{f \circ g}$$

$$A_h = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \in [2, +\infty) \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x > 2 \end{array} \right\} = (2, +\infty)$$

$$h(x) = f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln((\sqrt{x-2})^2) = \ln(x-2), \quad x > 2$$

B2. Έχουμε,

$$h(x) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2), \quad x > 2$$

Η h παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(2, +\infty)$

$$\text{με } h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$. Άρα είναι και 1-1 και αντιστρέψιμη.

Εύρεση Αντίστροφης

$$\begin{aligned}
 y = h(x) &\Leftrightarrow y = 2 \ln(\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \ln(\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow e^{\frac{y}{2}} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \\
 \left(e^{\frac{y}{2}}\right)^2 &= x-2 \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2
 \end{aligned}$$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

B3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)^{-\infty \cdot 2} = -\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

γιατί θέτω: $x-2 = u, \quad \lim_{x \rightarrow 2} u = 0, \quad x > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \ln(x-1) = 2 \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

Η f παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

- Αν $\kappa \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \kappa > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \kappa < 0 \end{cases}. \text{ Άτοπο.}$$

- Άρα $\kappa = 0$ και $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - \mu x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη C_f στο $0(0,0)$, επομένως:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{\mu(1 - 0^2)}{(0^2 + 1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Γ2.

i. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{(x^2+1)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

$$f'(x) < 0 \stackrel{(x^2+1)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\searrow		\nearrow		\searrow

T.E.

T.M.

- $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, -1)$ και η f συνεχής στο $(-\infty, -1]$
 άρα f γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$
- $f'(x) > 0$ στο $(-1, 1)$ και η f συνεχής στο $[-1, 1]$
 άρα f γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [-1, 1]$
- $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$ και η f συνεχής στο $[1, +\infty]$
 άρα f γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [1, +\infty]$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$, το

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{2}$.

ii. Από παραπάνω η f συνεχής άρα

$$\bullet f(A_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right),$$

$$\text{όπου: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\bullet f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

$$\bullet f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right],$$

$$\text{όπου: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Επομένως, } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Επειδή $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το $\alpha = 0$

• Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη,

$$\text{διότι } \frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$$

• Αν $\alpha = 0$, τότε $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$ η οποία έχει ακριβώς μία ρίζα,

την $x_2 = 1$, αφού $\frac{1}{2} \notin f(A_1)$.

• $-1 < x < 1 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < \frac{1}{2}$ και

• $x > 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) < \frac{1}{2}$.

Γ3.

$$\begin{aligned}
 \text{i. } I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+1} \cdot x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1) \cdot x^{2v+1}}{x^2+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - \frac{0^{2v+2}}{2v+2} = \frac{1}{2v+2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \stackrel{x^2+1>0}{=} \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{\ln(1^2+1)}{2} - \frac{\ln(0^2+1)}{2} = \frac{\ln 2}{2}.
 \end{aligned}$$

• Από το Γ3(i), έχουμε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$.

$$\text{Για } v=0: I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

$$\text{Για } v=1: I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}.$$

Θέμα Δ

Δ1

θέτω $h(x) = g(x) + x$ στο $[-1, 0]$

• Η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned}
 &h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\
 &h(0) = g(0) > 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(-1)h(0) < 0 \text{ αφού } 0 < g(x) < 1 \text{ για κάθε πραγματικό}$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Έστω ότι υπάρχει στο $(-1, 0)$ και δεύτερη ρίζα της h η ρ με $x_1 < \rho$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας

- h συνεχής στο $[x_1, \rho]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων
 - h παραγωγίσιμη στο (x_1, ρ) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = g'(x) + 1$.
 - $h(x_1) = h(\rho) = 0$
- Από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, \rho)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$

Άτοπο από υπόθεση

Άρα η x_1 μοναδική ρίζα της h δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Δ2. Η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

Αφού f παραγωγίσιμη ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (1) επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} 0 \cdot (g(0) + 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right) = 2 \cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Άρα, (1) $\Leftrightarrow 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right) \stackrel{0/0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1$$

Δ3. i) Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
 &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
 &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)[\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)]}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
 &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)[(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1)]}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0
 \end{aligned}$$

αφού $(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0$,

$2\sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$ (διότι στο $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$)

$\sigma\upsilon\nu^2 x > 0$

Και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

ii) f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

άρα $f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty)$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2 - \frac{3\pi}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\frac{\pi}{2}^-$.

Άρα υπάρχει x_2 τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \in [0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό λόγω

μονοτονίας

Δ4.

i. $x^2 \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

Άρα το πρόσημο της f στο διάστημα αυτό εξαρτάται από την h με $h'(x) = g'(x) + 1$

Η h' συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων αφού η g' συνεχής και δεν μηδενίζεται, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο

Εφαρμόζουμε Θμτ στην h στο $[x_1, 0]$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, 0) : h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{0 - x_1} = \frac{g(0)}{-x_1} > 0 \Rightarrow h'(\xi) > 0$$

Άρα $h'(x) > 0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

$$0 \geq x \geq x_1 \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow h(x) \geq 0 \text{ και } x^2 \geq 0$$

Άρα $f(x) \geq 0$

ii. Αν Ω το χωρίο και Ω_1, Ω_2 τα ισεμβαδικά χωρία $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$

$$\int_{x_1}^0 |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx, \quad f(x) \geq 0$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx$$

$$\int_{x_1}^0 (x^2 g(x) + x^3) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \left(-2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \ln \left| \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \right| - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{9} \right) - \left(-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln(\sigma\upsilon\nu 0) \right)$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= \left[x^3 g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = 0 - x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \\
 &= -x_1^3 \underbrace{(-x_1)}_{g(x_1)=-x_1} - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = x_1^4 - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) = \\
 &= x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - 3 \cdot \frac{x_1^4}{4} = x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \\
 &= \frac{4x_1^4}{4} - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} \\
 &= \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}
 \end{aligned}$$

Σχόλιο

Θέμα Α

Αναμενόμενο θέμα, χωρίς παγίδες ή εκπλήξεις.

Θέμα Β

Επίσης αναμενόμενο, με έλεγχο βασικών μεθοδολογιών. Είναι μικρότερο σε έκταση σε σχέση με τα αντίστοιχα θέματα προηγούμενων ετών. Το Β3 απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στους υπολογισμούς.

Θέμα Γ

Δεν περιλαμβάνει συνάρτηση με κλάδους, όπως συνέβαινε συνήθως τα προηγούμενα χρόνια. Το Γ3 ταυτίζεται ουσιαστικά με την άσκηση Γ4 της σελίδας 234 του σχολικού βιβλίου και είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα ερωτήματα, παρότι εμφανίζεται η συνάρτηση του θέματος. Συνολικά, το θέμα ελέγχει βασικές μεθοδολογίες και παρουσιάζει περίπου τον ίδιο βαθμό δυσκολίας με το περσινό, αλλά με διαφορετική προσέγγιση.

Θέμα Δ

Απαιτητικό, όπως συμβαίνει κάθε χρόνο, και αρκετά εκτεταμένο. Τα Δ1, Δ2 και Δ3 είναι μεθοδολογικά και βατά για πολύ καλά προετοιμασμένους μαθητές. Ιδιαίτερα το Δ3(i) αντιστοιχεί στην άσκηση Β8 της σελίδας 140 του σχολικού βιβλίου.

Το Δ4:

- **(i)** είναι ιδιαίτερα απαιτητικό τόσο ως προς την κεντρική ιδέα όσο και ως προς την εκτέλεσή του.
- **(ii)** είναι επίσης απαιτητικό, αλλά αναμενόμενο για τη φετινή χρονιά, καθώς απαιτεί πολύ καλό χειρισμό των ιδιοτήτων των ολοκληρωμάτων και των μεθόδων ολοκλήρωσης.